Prolongement de la fonction Gamma et formule de Weierstrass

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
- 245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.
- 265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *La fonction* $\Gamma : z \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ *est holomorphe sur* $\Omega_0 = \{\Re > 0\}$*. Elle se prolonge méromorphiquement à* $\mathbb{C}$ *avec des pôles simples aux entiers* $-n$*,* $n \in \mathbb{N}$ *avec comme résidu* $\frac{(-1)^n}{n!}$*.*

Preuve :

Étape 1 : Montrons que Γ est holomorphe sur Ω_0.

Soit $K \subset \Omega_0$ un compact, il existe $0 < a \leq b$ tel que $\Re(K) \subset [a, b]$. On utilise le théorème d'holomorphie sous le signe somme :

- $\forall z \in \Omega_0, t > 0 \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue.
- $\forall t > 0, z \in \Omega_0 \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est holomorphe sur K

Si $t > 0, z \in K$, alors $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \leq \underbrace{\begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}}_{:=\varphi(t)}$.

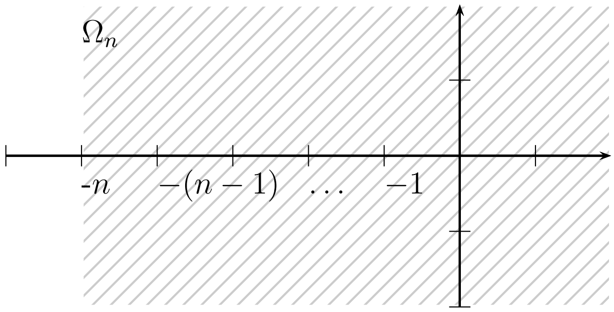
φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car $a > 0$ donc par théorème d'holomorphie sous le signe somme, Γ est holomorphe sur K donc Γ est holomorphe sur Ω_0.

Étape 2 : On prolonge Γ à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^-$

Pour $z \in \Omega_0$, on a par intégration par parties :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{t}\,\mathrm{d}t = z\Gamma(z) \quad (*)$$

En notant pour $n \geq 1, \Omega_n = \{\Re > -n\} \setminus \{0, -1, \dots, -(n-1)\}$



Si $z \in \Omega_0$, par itération de $(*)$, on a $\Gamma(z+n) = (z+n-1)\dots(z+1)\Gamma(z)$. D'où

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)\dots(z+1)z}$$

Le terme de droite définit une fonction holomorphe sur Ω_n. On définit Γ sur Ω_n par cette formule.

Si $m \geq n \geq 1$, alors les prolongements obtenues sur Ω_n coïncident par prolongement analytique (les deux valent Γ sur l'ouvert non vide Ω_0). En effectuant cela pour tout $n \geq 1$, on prolonge Γ sur tout $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^-$ de façon holomorphe.
On a pour $n \geq 0$,

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\dots(z+1)} \xrightarrow[z \to -n]{} \frac{\Gamma(1)}{(-1)\dots(-n+1)(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Donc $-n$ est un pôle simple de Γ de résidu $\mathrm{Res}_\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}$. $\square$

Théorème. $\frac{1}{\Gamma}$ *est une fonction entière vérifiant*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Preuve : Soit $x > 0$ réel, par convergence dominée,

$$\Gamma(x) = \lim_{N \to +\infty} \underbrace{\int_0^N t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N \mathrm{d}t}_{:= I_N(x)}$$

Car on dispose de la domination $\left(1 - \frac{t}{N}\right)^N = \exp\left(N \ln\left(1 - \frac{t}{N}\right)\right) \leq \exp\left(N \frac{-t}{N}\right) = e^{-t}$.
Trouvons une autre expression de $I_N(x)$:

$$I_N(x) = \left[\frac{t^x}{x}\left(1 - \frac{t}{N}\right)^N\right]_0^N - \int_0^N \frac{t^x}{x} \frac{-N}{N} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\frac{N}{N} \int_0^N t^x \left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-1} \mathrm{d}t$$

En réitérant on a

$$\begin{aligned} I_N(x) &= \frac{1}{x}\frac{N}{N}\frac{1}{x+1}\frac{N-1}{N} \int_0^N t^{x+1} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-1} \mathrm{d}t \\ &\vdots \\ &= \frac{N(N-1)\dots(N-(N-1))}{N^N x(x+1)\dots(x+N-1)} \int_0^N t^{x+N-1} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^0 \mathrm{d}t \\ &= \frac{N!}{\cancel{N^N} x(x+1)\dots(x+N-1)} \frac{N^{x+\cancel{N}}}{x+N} \end{aligned}$$

D'où $I_N(x) = \left(xN^{-x} \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right)^{-1}$.

D'où comme $\Gamma(x) > 0$, $\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{N \to +\infty} \left(xN^{-x} \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right)$.

Or, $N^{-x} = \exp(-x \ln(N)) = \exp(-xH_N) \exp(x(H_N - \ln(N)))$ où H_N est la somme partielle de la série harmonique, comme $H_N - \ln(N) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \gamma$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

Or, la fonction $z \mapsto ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$ est une fonction entière d'après le critère d'holomorphie d'un produit de fonctions holomorphes.

En effet, pour $R > 0$ et $|z| < R$,

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = \left(1 + \frac{z}{n}\right) \left(1 - \frac{z}{n} + \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme les deux fonctions γ et $z \mapsto ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$ coïncident sur $]0, +\infty[$, elles coïncident sur $\mathbb{C}$. $\square$

Remarque 1. En connaissant les zéros d'un tel produit, on obtient les zéros de $\frac{1}{\Gamma}$: ce sont les $-n$ avec $n \geq 0$, on retrouve ainsi les pôles de la fonction Γ.